報告番号	※甲　　第　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目　最適速度模型におけるクラスタの形成とホップ分岐現象

氏　　名　山本　眞己

論　文　内　容　の　要　旨

本論文の第一の目的は、最適速度模型（the Optimal Velocity model、OV モデル）の 2 つの解（一様流解と移動クラスタ解）の安定性の変化が Hopf 分岐現象であり、それは粒子間の非対称相互作用に起因することを、連続系モデルを用いて解析的に証明することである。第二の目的は、相図において観察される 2 種類の安定性の変化が Hopf 分岐の 2 つのタイプ（superciritical 分岐と subcirical 分岐）に対応することを、連続系モデルから導いた定常伝播解の力学系を用いて示すことである。

本論文では、近年注目されている非平衡散逸系において特徴的な群形成、パターン形成現象を示す数理模型として、多体粒子系である OV モデルを取り上げる。第 1 章では、反応拡散方程式等の非平衡散逸系を記述するモデルと OV モデルを比較し、OV モデルの興味深い性質は非対称な相互作用に起因することを説明する。OV モデルが持つ一様流解と移動クラスタ解という 2 つの解の間の安定性の変化は、物理学的見地からは“動的相転移現象”であり、力学系の立場からは、移動クラスタ解が描くプロファイルより Hopf 分岐現象であることを示唆する。この分岐現象は OV タイプの非平衡散逸系を特徴づける重要な性質であることを述べる。

第 2 章では、OV モデルの基本事項を概観する。1 次元空間内における粒子の運動を制御する OV モデルの方程式について説明する。OV モデルの 2 つの解、一様流解と移動クラスタ解の特徴について述べる。感応度と平均粒子間隔の 2 つのコントロールパラメータと 2 つの解の安定性の変化との関係について述べる。一様流解の安定性の変化を調べるために、微小な偏差に対し線形解析を行い、解の安定性の条件を導く。数値解析において、移動クラスタ解の粒子間隔-速度空間上のプロファイルが、リミットサイクルを描くことを紹介し、Hopf 分岐との関連について述べる。

第3章において、OVモデルの示す動的相転移現象はHopf分岐現象であることと、Hopf分岐現象の原因が粒子間の非対称相互作用であることを、連続系モデルを用いて証明する。

元の離散多体系のOVモデルを解析しやすくするために、まず粒子番号について連続極限を取った連続系モデルを導出する。連続系モデルの自明な解は元のOVモデルの一様流解に対応する。自明な解に対して線形解析を行い、自明な解の安定性条件が元のOVモデルの結果と一致することを示す。それ故、連続系モデルはOVモデルの解の安定性を正しく反映していることを述べる。連続系モデルにおける線形解析で求めた各モードの固有値についての考察から、OVモデルの臨界点がHopf分岐点であることを示す。その上で、この臨界点が従来のHopf分岐点とは異なる"多体系のHopf分岐点"と見なせることを述べる。

OVモデルの非対称な粒子間相互作用を一般化したモデルを提示し、そのモデルからOVモデルと同様に連続系モデルを導く。この一般化した連続系モデルによって、粒子間の非対称な相互作用がHopf分岐の原因であることを解析的に示す。

第4章では、Hopf分岐の詳細な性質を考察するための、標準形の方法について一般的に述べる。標準形への変換とは、非線形な変数変換によって力学系の表式からirrelevantな高次の項を消去して、力学系の本質を損なわずに単純化する変換である。単純化された力学系は、平衡点近傍ならば、元の力学系にtopologicalな意味においては忠実に振舞う。一般には、力学系に対して標準形への変換を行っても、1次の項のみを持つ力学系には還元できない。除去できない非線形項は、変換を施す前の力学系が持つ本質的な非線形性と考えることができる。共役複素数を力学変数として用いた、簡便な力学系の標準形への変換方法を述べる。原点においてHopf分岐を起こす2自由度の力学系に対して、3次の項までの標準形への変換方法の概略とその結果を示す。標準形を極座標へ変換することが、リミットサイクル解の解析に適していることを述べ、その解析について考察する。得られた力学系の極座標表示の係数の組み合わせから4つの場合が生じることを述べ、それぞれの場合の解析結果を示す。

第5章では、解の安定性について、感応度-平均粒子間隔空間上に描いた相図を用い、OVモデルの解の安定性における2種類の変化について説明する。各々の安定性の変化が、Hopf分岐の詳細な構造としてのsupercritical分岐かsubcritical分岐かの何れに対応するかを標準形を用いた解析によって調べる。

その解析のための力学系は、定常伝播解が満たす2自由度の力学系として導かれる。この力学系を決定するためには、非線形情報を含む移動クラスタの速度の値が必要であり、そのクラスタの速度はリミットサイクルの感応度に対する依存性から得られることを述べる。

OVモデルの連続系モデルにおいて、定常伝播解が満たす力学系を導出する。導

出された力学系の固定点は、OV モデルの一様流解に対応する。固定点における Jacobi 行列の固有値を求める。臨界点では、この固有値が Hopf 分岐の条件を満たすべきである。このことより、定常伝播解の仮定に含まれる速度が満たすべき条件を得る。

力学系を確定するため、定常伝播解の速度を評価する方法について述べる。その際、クラスタの伝播速度が感応度の関数となることが重要である。

supercritical 分岐と予想される場合、特に Hopf 分岐点（臨界点）上での伝播速度の評価の方法について述べる。この臨界点は、解の安定性の相図における臨界曲線の極大点に対応する。粒子間隔-速度空間上の安定なリミットサイクルの上端点と下端点の粒子間距離を用いたクラスタの速度の公式を示し、感応度を臨界感応度へ近づけたときの、リミットサイクルの振舞いについて述べる。この場合、リミットサイクルは小さくなり、上端点と下端点は最適速度関数が変曲点に関して対称なので、変曲点に近づく。この事実とクラスタの速度の公式を用い、臨界点でのクラスタの伝播速度の厳密な評価を行う。このクラスタ速度の評価が、先に導いた Hopf 分岐点（臨界点）上でクラスタの速度が満たすべき条件を満足し、定常伝播解についての力学系が、臨界点において元の OV モデルと整合することを確認する。

次に、臨界曲線の極大点において得られたクラスタ速度から、相図上の他の点における速度の評価を行う。数値解析における事実として、平均粒子間隔が異なっていても感応度の値が一致していれば、移動クラスタの伝播速度は同じ値をとる。この事実から、平均粒子間隔-感応度空間上の臨界曲線に沿って、感応度パラメータを変化させる場合を考え、このときの平均粒子間隔の変化を、次元の一致する粒子間距離の変化と読み替え、感応度と粒子間距離の間に関係をつける。こうして、supercritical 分岐と予想される場合で、極大点以外における移動クラスタ速度の評価を行うことができる。

同様して、極大点以外の点で臨界曲線を横切る subcritical 分岐と予想される場合において、移動クラスタの速度の評価を行う。

得られたクラスタ速度を用いて定常伝播解の力学系を確定し、力学系の挙動を考察する。力学系の一次の項まで取り、固定点である原点における Jacobi 行列とその固有値を求め、固定点の周辺の解の安定性を調べる。こうして、相図上の極大点を通過し臨界曲線を横切る場合において、定常伝播解の満たす力学系の挙動は supercritical 分岐の場合と符合することを示す。

また、同様に臨界曲線上を極大点以外で通過する場合において、定常伝播解の満たす力学系の挙動は subcritical 分岐の場合と符合することを示す。

第 6 章では、本論文のまとめを行い、定常伝播解の力学系の 3 次または 5 次までの項を求め、標準形への変換を行うことによって、より詳細なリミットサイクル解の構造を確認することができることを述べる。

最後に、macroscopicな現象としてHopf分岐現象を呈するものには、microscopicな非対称相互作用の存在が関係する非平衡散逸粒子系のクラスが存在する可能性について述べる。